ТЕНЗОРНАЯ СТРУКТУРА ГРАВИТАЦИИ В ODTOE

(Tensor Structure of Gravity in ODTOE)

Метрика, связность, Риман и Эйнштейн из observer-correlator; решение Керра как тест

Панкратов Антон Сергеевич
Pankratov Anton Sergeevich
Независимый исследователь, г. Казань, Россия
E-mail: anton.s.pankratov@gmail.com
ORCID: 0009-0002-4870-2995

УДК 530.12 + 530.145 + 531.51

АННОТАЦИЯ

В настоящей работе строится тензорный слой ODTOE-гравитации между причинной структурой [15] §VI и полным тензорным законом Эйнштейна. Метрический тензор $g_{\mu\nu}(C;O)$ вводится как observer-correlator: скалярное произведение градиентов самонаблюдательного отображения $\Phi = \iota \circ \hat{O}$ по координатам конфигурационного многообразия $\mathcal{C}$. Ковариантная производная ∇_μ выводится как предел Φ-итерационного коммутатора по направлению; восстанавливаются символы Кристоффеля Леви-Чивиты. Тензор кривизны Римана $R^\rho{}_{\sigma\mu\nu}$ определяется как мера некоммутативности оператора $\hat{O}$ на двух разных направлениях вдоль $\mathcal{C}$; восстанавливается стандартная координатная формула с сигнатурой Мизнера—Торна—Уилера [2]. Тензоры Риччи $R_{\mu\nu} = R^\rho{}_{\mu\rho\nu}$ и скаляр $R = g^{\mu\nu}R_{\mu\nu}$, тензор Эйнштейна $G_{\mu\nu} = R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}R$ строятся стандартными свёртками; кинематическое тождество Бианки $\nabla_\mu G^{\mu\nu} = 0$ формулируется как чисто геометрическое следствие гладкости $g_{\mu\nu}$. Введён инерционный скалярный потенциал Π_I, формализующий запись §V.1 работы [15] и заменяющий устаревшее обозначение Φ_I из [14] §IX. Решение Керра в координатах Бойера—Линдквиста [7] выводится как сферически-аксиальный анзац с вихревой SYNC-компонентой, индуцированной угловым моментом источника; равенство $r_+ = M + \sqrt{M^2 - a^2}$ для внешнего горизонта восстанавливается без подгонки. Численная демонстрация в 50-значной точности воспроизводит сдвиг перигелия Меркурия $\Delta\phi = 42{,}99$ arcsec/век и положение экваториальной эргосферы $r_E^{\mathrm{eq}} = 2M$ для солнечной массы. Работа закрывает первый этап программы §XIV.3 из [15] (тензорная структура) и оставляет вывод $T_{\mu\nu}$ из B-функционала (этап 2) и тождества Бианки как Noether-следствия диффеоморфной инвариантности (этап 3) в качестве явных следующих шагов.

Ключевые слова: ODTOE, тензорная гравитация, метрический тензор, observer-correlator, ковариантная производная, тензор Римана, тензор Риччи, тензор Эйнштейна, метрика Шварцшильда, метрика Керра, эргосфера, тождество Бианки, Π_I, Φ-итерация

ABSTRACT

This paper builds the tensor layer of ODTOE gravity between the causal structure of [15] §VI and the full Einstein tensor law. The metric tensor $g_{\mu\nu}(C;O)$ is introduced as an observer-correlator: the inner product of gradients of the self-observation map $\Phi = \iota \circ \hat{O}$ along coordinates of the configuration manifold $\mathcal{C}$. The covariant derivative ∇_μ is derived as a limit of the Φ-iteration commutator along a direction; the Levi-Civita Christoffel symbols are recovered. The Riemann curvature tensor $R^\rho{}_{\sigma\mu\nu}$ is defined as a measure of non-commutativity of the operator $\hat{O}$ along two distinct directions on $\mathcal{C}$; the standard coordinate formula with the Misner—Thorne—Wheeler [2] sign convention is recovered. The Ricci tensor $R_{\mu\nu} = R^\rho{}_{\mu\rho\nu}$, the Ricci scalar $R = g^{\mu\nu}R_{\mu\nu}$, and the Einstein tensor $G_{\mu\nu} = R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}R$ are built by standard contractions; the kinematic Bianchi identity $\nabla_\mu G^{\mu\nu} = 0$ is stated as a purely geometric consequence of the smoothness of $g_{\mu\nu}$. An inertial scalar potential Π_I is introduced, formalizing the notation of [15] §V.1 and replacing the legacy symbol Φ_I of [14] §IX. The Kerr solution in Boyer—Lindquist coordinates [7] is derived as a spherically-axial ansatz with a vortex SYNC component induced by the angular momentum of the source; the relation $r_+ = M + \sqrt{M^2 - a^2}$ for the outer event horizon is recovered without fitting. A 50-digit numerical demonstration reproduces the perihelion shift of Mercury $\Delta\phi = 42.99$ arcsec/century and the position of the equatorial ergosphere $r_E^{\text{eq}} = 2M$ for solar mass. The work closes the first stage of the programme §XIV.3 of [15] (tensor structure) and leaves the derivation of $T_{\mu\nu}$ from the B-functional (stage 2) and Bianchi identities as a Noether consequence of diffeomorphism invariance (stage 3) as explicit next steps.

Keywords: ODTOE, tensor gravity, metric tensor, observer-correlator, covariant derivative, Riemann tensor, Ricci tensor, Einstein tensor, Schwarzschild metric, Kerr metric, ergosphere, Bianchi identity, Π_I, Φ-iteration

I. ВВЕДЕНИЕ И ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

В общей теории относительности гравитация полностью кодируется метрическим тензором $g_{\mu\nu}$ и его производными: связностью ∇_μ, кривизной Римана $R^\rho{}_{\sigma\mu\nu}$, тензорами Риччи и Эйнштейна. Для альтернативной теории гравитации формальное воспроизведение значения постоянной G или ньютоновского предела недостаточно: необходимо вывести каждый из перечисленных тензорных объектов как конкретное конфигурационное построение. Деривация G из первых принципов ODTOE дана в [14]; причинный слой ODTOE-гравитации построен в [15] и доводит изложение до эффективной метрики $g_{00}^{\text{eff}} = (I_0/I_{\text{eff}})^2$ (см. [15] уравнение (6.2)) и сферически-симметричного шварцшильдовского анзаца. Настоящая работа закрывает следующий слой — тензорную структуру.

Эпистемический статус. Настоящая работа выводит тензорные геометрические объекты ($g_{\mu\nu}$, ∇_μ, $R^\rho{}_{\sigma\mu\nu}$, $R_{\mu\nu}$, R, $G_{\mu\nu}$) и кинематическое тождество Бианки $\nabla_\mu G^{\mu\nu} = 0$ как структурные свойства метрики на конфигурационном многообразии. Динамическое уравнение поля $G_{\mu\nu} = (8\pi G/c^4)T_{\mu\nu}$ *не* *выводится* в полной форме: тензор энергии-импульса как функциональная производная B-функционала остаётся открытой задачей следующего этапа программы [15] §XIV.3. Решение Керра воспроизводится как анзац с явно указанной вихревой SYNC-компонентой; полное микроскопическое доказательство решения уравнений Эйнштейна в вакууме относится к этапу 3 той же программы.

I.1. Что закрывает настоящая статья

Перечень из пяти структурных пробелов, оставленных открытыми в [15] §XIV.3 (этап 1 «тензорная структура»), закрывается следующим образом:

1. **Метрический тензор $g_{\mu\nu}$ как ODTOE-объект.** В §III метрика определяется как observer-correlator (формула (3.1)); это даёт корректное обобщение временной компоненты $g_{00}^{\text{eff}} = (I_0/I_{\text{eff}})^2$ из [15] §VI на полный тензор. Слабополевой предел восстанавливает [15] уравнение (6.2).

2. **Ковариантная производная ∇_μ как Φ-итерационный коммутатор.** В §IV предел Φ-итерационного коммутатора по направлению идентифицируется как ∇_μ на векторных и тензорных полях, а условие метрической совместимости $\nabla_\rho g_{\mu\nu} = 0$ восстанавливает символы Кристоффеля Леви-Чивиты.

3. **Тензор Римана из некоммутативности $\hat{O}$.** В §V $R^\rho{}_{\sigma\mu\nu}$ возникает как мера некоммутативности SYNC-операций по двум независимым направлениям и связан со стандартной координатной формулой [2] уравнение (8.49) через Кристоффели §IV.

4. **Тензоры Риччи и Эйнштейна стандартными свёртками.** В §VI и §VII строятся $R_{\mu\nu}$, R и $G_{\mu\nu}$; в §VII доказывается, что $\nabla_\mu G^{\mu\nu} = 0$ есть кинематическое (чисто дифференциально-геометрическое) тождество, отличное от динамического Бианки-как-Noether (последний — задача этапа 3).

5. **Решение Керра как тест.** В §VIII воспроизводится метрика Бойера—Линдквиста [7] для вращающегося источника с явной SYNC-вихревой компонентой; в §IX численная демонстрация в 50-значной точности воспроизводит сдвиг перигелия Меркурия и положение экваториальной эргосферы $r_E^{\text{eq}} = 2M$, что закрывает пункт 2 раздела XXIV работы [14].

I.2. Структура изложения

§II рекапитулирует минимальный ODTOE-формализм, фиксирует обозначение Π_I и явно отмечает, что в [14] §IX тот же скаляр обозначался Φ_I. §III—§VII строят геометрический аппарат; §VIII даёт верификацию на решении Керра; §IX содержит численную демонстрацию; §X излагает связь с корпусом и открытую программу; §XI заключает.

II. ODTOE-ПРИМИТИВЫ И ФИКСАЦИЯ ОБОЗНАЧЕНИЙ

II.1. Базовые объекты

Базовый формализм ODTOE [13] §II (см. также [15] уравнение (1.2)) задаёт три объекта: пространство потенциальных состояний $\mathcal{H}$, пространство актуализированных конфигураций $\mathcal{C}$ и оператор наблюдения $\hat{O}$:

$$R = \hat{O}(\Psi), \qquad \Psi \in \mathcal{H}, \quad R \in \mathcal{C}. \tag{2.1}$$

Самонаблюдательное отображение

$$\Phi = \iota \circ \hat{O} : \mathcal{H} \to \mathcal{H}, \tag{2.2}$$

где $\iota : \mathcal{C} \hookrightarrow \mathcal{H}$ возвращает результат актуализации в потенциальный слой как новый вход следующего цикла.

Многообразие $\mathcal{C}$ вводится как гладкое многообразие, локально параметризуемое координатами $\{x^\mu\}$, $\mu = 0,1,2,3$, с временеподобной координатой x^0 и тремя пространственноподобными x^1, x^2, x^3. Гладкость $\mathcal{C}$ — допущение настоящей работы, наследуемое от макроскопического описания и согласное с тем, что элементарные масштабы r_0, τ_0 из [15] уравнение (2.6) существенно меньше всех рассматриваемых ниже масштабов.

Конфигурационная инерция $I(C)$ — скаляр на $\mathcal{C}$, определённый постулатом P3 в [13] и игравший центральную роль в [15]; в макропределе масса связана с I соотношением $m = \kappa I(C)$.

II.2. Инерционный скалярный потенциал Π_I (фиксация обозначения)

Через всю настоящую работу для инерционного скалярного потенциала источника используется единое обозначение $\Pi_I(C; M, r)$. Оно совпадает с Π_I работы [15] §V.1 (см. там сноску о коллизии с $\Phi = \iota \circ \hat{O}$) и формализует величину, обозначавшуюся Φ_I в [14] §IX. В слабополевом макроскопическом пределе для статического источника массы M:

$$\Pi_I(r) = \frac{GM}{r}. \tag{2.3}$$

Нотационное замечание. Символ Φ зарезервирован за самонаблюдательным оператором (2.2). Любое появление Φ_I в более ранних работах корпуса [14] следует читать как Π_I настоящей работы. Сноску о соответствии и таблицу глоссария см. также в [15] Appendix A.

II.3. Эффективная инерция и временная компонента метрики (рекап)

Из работы [15] уравнения (5.2) и (6.2) следуют два результата, на которые опирается дальнейшее построение:

$$I_{\text{eff}}(r) = \frac{I_0}{\sqrt{1 - 2\Pi_I(r)/c^2}}, \tag{2.4}$$

$$g_{00}^{\text{eff}} \simeq 1 - \frac{2\Pi_I}{c^2} = \left(\frac{I_0}{I_{\text{eff}}}\right)^2. \tag{2.5}$$

Соотношение (2.5) даёт временной компонент метрики. В §III оно расширяется до полного тензора $g_{\mu\nu}$ через определение observer-correlator.

III. МЕТРИКА $g_{\mu\nu}$ КАК OBSERVER-CORRELATOR

III.1. Определение

Пусть $\Phi = \iota \circ \hat{O}$ — самонаблюдательное отображение (2.2), рассматриваемое как $\mathcal{H}$-значное поле на $\mathcal{C}$. Для пары координат x^μ, x^ν на $\mathcal{C}$ определим observer-correlator:

$$\boxed{g_{\mu\nu}(C; O) = \langle \partial_\mu \Phi,\, \partial_\nu \Phi \rangle_{O,C}} \tag{3.1}$$

где $\langle \cdot, \cdot \rangle_{O,C}$ — скалярное произведение в $\mathcal{H}$, индуцированное парой «наблюдатель O + конфигурация C» через SYNC-доступность [15] §II. Это корректно определённое симметричное билинейное отображение касательных векторов на $\mathcal{C}$ в скаляры:

$$g_{\mu\nu} = g_{\nu\mu}, \qquad g_{\mu\nu} V^\mu W^\nu \in \mathbb{R}. \tag{F1}$$

Симметрия следует из коммутативности скалярного произведения; невырожденность в макропределе следует из неравенства нулю SYNC-плотности при ненулевом $I(C)$. Таким образом, $g_{\mu\nu}$ задаёт псевдориманову метрику на $\mathcal{C}$, сигнатура которой $(-,+,+,+$ в соглашении [2]) определяется временеподобностью координаты x^0 относительно фронта актуализации $c = r_0/\tau_0$ [15] уравнение (2.6).

III.2. Восстановление слабополевого предела

В слабополевом пределе $\Pi_I/c^2 \ll 1$ для статического источника градиент $\partial_0 \Phi$ соответствует фронту актуализации со скоростью c, корректированной множителем $\sqrt{g_{00}^{\text{eff}}}$. Подстановка в (3.1) даёт

$$g_{00}^{\text{eff}} = \langle \partial_0 \Phi, \partial_0 \Phi \rangle_{O,C} \big|_{\text{weak}} = \left(\frac{I_0}{I_{\text{eff}}} \right)^2 = 1 - \frac{2\Pi_I}{c^2}, \tag{F2}$$

что совпадает с [15] уравнение (6.2). Таким образом, формула (3.1) — корректное тензорное обобщение изолированной временной компоненты, ранее построенной в причинном слое.

III.3. Пространственные компоненты

Для статического сферически-симметричного источника изотропия и сохранение SYNC-вихря по угловым направлениям диктуют, что пространственные компоненты в координатах (r, θ, ϕ) имеют вид

$$g_{rr} = \left(1 - \frac{2\Pi_I}{c^2} \right)^{-1}, \qquad g_{\theta\theta} = r^2, \qquad g_{\phi\phi} = r^2 \sin^2\theta, \tag{3.2}$$

восстанавливая шварцшильдовский анзац [15] уравнение (6.3). Полный микроскопический вывод g_{rr} из суммирования SYNC-каналов по радиальным направлениям остаётся в перечне открытых задач [15] §XIV.1, пункт 1; здесь анзац принимается из слабополевого соответствия и подтверждается тестами Солнечной системы (см. §IX).

IV. СВЯЗНОСТЬ ∇_μ КАК Φ-ИТЕРАЦИОННЫЙ КОММУТАТОР

IV.1. Определение через предел коммутатора

Пусть $V^\nu(x)$ — векторное поле на $\mathcal{C}$. На уровне микроскопической SYNC-динамики каждый сдвиг по координате x^μ на Δx^μ соответствует $\Delta x^\mu / r_0$ актам Φ-итерации в направлении μ. Параллельный перенос вектора V^ν вдоль одного такого направления и затем вдоль другого даёт результат, отличающийся от противоположного порядка переносов на величину, измеряемую коммутатором Φ-операций. Определим ковариантную производную как предел этого коммутатора:

$$\boxed{\nabla_\mu V^\nu = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{1}{\Delta x} \left[\Phi_{\Delta x}^{(\mu)} V^\nu - V^\nu(x + \Delta x\, \hat{e}_\mu) \right]} \tag{F3}$$

где $\Phi_{\Delta x}^{(\mu)}$ — оператор Φ-параллельного переноса на расстояние Δx вдоль координаты x^μ, а $\hat{e}_\mu$ — координатный касательный вектор. Геометрически $\Phi_{\Delta x}^{(\mu)}$ есть последовательная композиция $\Delta x / r_0$ актов SYNC по направлению μ.

Замечание о фиксации символа. Обозначение ∇_μ для предела (F3) фиксируется через всю настоящую работу и весь дальнейший корпус ODTOE-гравитации.

Альтернативные символы (например, D_μ) использоваться не должны. Эта фиксация — митигация риска H1, выявленного на этапе анализа: совпадение ∇_μ с операторами других секций корпуса исключено по построению, поскольку ∇_μ применяется только к тензорным полям на $\mathcal{C}$, а не к элементам $\mathcal{H}$.

IV.2. Выражение через символы Кристоффеля

Композиция $\Phi^{(\mu)}_{\Delta x}\, V^\nu$ в первом порядке по Δx имеет вид $V^\nu + \Delta x\, \Gamma^\nu{}_{\mu\rho} V^\rho + O(\Delta x^2)$, где коэффициенты $\Gamma^\nu{}_{\mu\rho}$ называются символами связности. Из (F3) получаем стандартное координатное выражение:

$$\nabla_\mu V^\nu = \partial_\mu V^\nu + \Gamma^\nu{}_{\mu\rho} V^\rho. \tag{4.1}$$

Теорема A.T1 (единственность связности Леви-Чивиты). *Φ-итерация на $\mathcal{C}$ индуцирует единственную связность ∇_μ, удовлетворяющую двум условиям*:

1. *отсутствие кручения:* $\Gamma^\rho{}_{\mu\nu} = \Gamma^\rho{}_{\nu\mu}$;
2. *метрическая совместимость:* $\nabla_\rho g_{\mu\nu} = 0$.

Доказательство. Отсутствие кручения следует из того, что Φ-итерация на $\mathcal{C}$ задаётся симметричным потоком SYNC-актов: переход $x^\mu \to x^\mu + \Delta x^\mu$ затем $x^\nu \to x^\nu + \Delta x^\nu$ согласован с обратным порядком на коммутаторе $[\nabla_\mu, \nabla_\nu]$ через тензор Римана §V, а не через тензор кручения. Метрическая совместимость вытекает из определения (3.1): $g_{\mu\nu}$ построена через скалярные произведения градиентов Φ, а Φ-итерация по построению переносит эти градиенты согласованно. Стандартная теорема дифференциальной геометрии (см. [2] §10.3, [3] §3.1) утверждает, что эти два условия задают связность однозначно. □

Следствие — стандартная формула Кристоффеля:

$$\Gamma^\rho{}_{\mu\nu} = \frac{1}{2} g^{\rho\sigma} \big(\partial_\mu g_{\nu\sigma} + \partial_\nu g_{\mu\sigma} - \partial_\sigma g_{\mu\nu}\big). \tag{F4}$$

IV.3. Распространение на тензорные поля

Для (p,q)-тензора $T^{\nu_1\ldots\nu_p}{}_{\rho_1\ldots\rho_q}$ ковариантная производная задаётся по правилу Лейбница:

$$\nabla_\mu T^{\nu_1\ldots\nu_p}{}_{\rho_1\ldots\rho_q} = \partial_\mu T^{\cdots} + \sum_{i=1}^{p} \Gamma^{\nu_i}{}_{\mu\sigma} T^{\ldots\sigma\ldots} - \sum_{j=1}^{q} \Gamma^\sigma{}_{\mu\rho_j} T^{\cdots}{}_{\ldots\sigma\ldots}. \tag{4.2}$$

Это распространение единственно при заданных (4.1) и метрической совместимости и совпадает со стандартным определением [2] уравнение (10.10).

V. ТЕНЗОР КРИВИЗНЫ РИМАНА $R^{\rho}{}_{\sigma\mu\nu}$

V.1. Определение через некоммутативность $\hat{O}$

Если бы Φ-итерация на $\mathcal{C}$ была абсолютно одинакова во всех направлениях и точках, то параллельный перенос вектора по замкнутому пути возвращал бы исходный вектор тождественно. Гравитационная неоднородность инерции I_{eff} нарушает это равенство: SYNC-операции $\Phi^{(\mu)}_{\Delta x}$ и $\Phi^{(\nu)}_{\Delta y}$ не коммутируют на конфигурациях $C \neq C'$. Тензор Римана определяется как мера этой некоммутативности на векторных полях:

$$\boxed{R^{\rho}{}_{\sigma\mu\nu}\, V^{\sigma} = [\nabla_{\mu}, \nabla_{\nu}]\, V^{\rho}} \tag{F5}$$

Геометрически $R^{\rho}{}_{\sigma\mu\nu}$ измеряет, насколько SYNC-цикл $\hat{O} \to \hat{O} \to \hat{O} \to \hat{O}$ по бесконечно малому замкнутому контуру в плоскости (x^{μ}, x^{ν}) отклоняется от тождества при действии на компоненту V^{σ}.

V.2. Координатная форма

Подставив (F4) в (F5) и раскрыв коммутатор по правилу (4.1), получаем стандартную координатную формулу:

$$R^{\rho}{}_{\sigma\mu\nu} = \partial_{\mu}\Gamma^{\rho}{}_{\nu\sigma} - \partial_{\nu}\Gamma^{\rho}{}_{\mu\sigma} + \Gamma^{\rho}{}_{\mu\lambda}\Gamma^{\lambda}{}_{\nu\sigma} - \Gamma^{\rho}{}_{\nu\lambda}\Gamma^{\lambda}{}_{\mu\sigma}. \tag{F6}$$

Знаковое соглашение в (F6) совпадает с [2] уравнение (8.45) и [3] уравнение (3.2.3). Альтернативное соглашение Хокинга—Эллиса [4] отличается общим знаком; через настоящую работу принят MTW-вариант, поскольку он доминирует в современной литературе по чёрным дырам и гравитационным волнам, на которые опирается §VIII.

V.3. Алгебраические свойства и тождества

Из (F5) непосредственно следуют стандартные алгебраические свойства [2] §13.5:

$$R^{\rho}{}_{\sigma\mu\nu} = -R^{\rho}{}_{\sigma\nu\mu}, \qquad R_{\rho\sigma\mu\nu} = -R_{\sigma\rho\mu\nu}, \qquad R_{\rho\sigma\mu\nu} = R_{\mu\nu\rho\sigma}, \tag{5.1}$$

а также первое тождество Бианки

$$R^{\rho}{}_{\sigma\mu\nu} + R^{\rho}{}_{\mu\nu\sigma} + R^{\rho}{}_{\nu\sigma\mu} = 0 \tag{5.2}$$

и второе тождество Бианки (дифференциальное)

$$\nabla_{\lambda}R^{\rho}{}_{\sigma\mu\nu} + \nabla_{\mu}R^{\rho}{}_{\sigma\nu\lambda} + \nabla_{\nu}R^{\rho}{}_{\sigma\lambda\mu} = 0, \tag{5.3}$$

наследуемое из (F6) через свойства частных производных и (4.1). Эти тождества — чисто геометрические следствия определения (F5), не предполагающие никаких полевых уравнений; их использование в §VII даёт кинематическое тождество $\nabla_\mu G^{\mu\nu} = 0$.

V.4. Резонанс с causal-структурой ODTOE

Физическая интерпретация $R^\rho{}_{\sigma\mu\nu}$ в ODTOE согласуется с причинной интерпретацией, развитой в [15] §VII: гравитация деформирует световые конусы не локально, а через накопление SYNC-дефицита по замкнутым контурам. Ненулевой $R^\rho{}_{\sigma\mu\nu}$ в области означает, что некоторая последовательность Φ-актов по замкнутому пути возвращает наблюдателя не в исходную конфигурацию, а в конфигурацию, отличающуюся на величину, контролируемую кривизной. В этом смысле тензор Римана — точная количественная форма деформации причинного будущего J_O^+ из [15] уравнение (7.5).

VI. ТЕНЗОР РИЧЧИ $R_{\mu\nu}$ И СКАЛЯР R

VI.1. Определение

Тензор Риччи определяется как свёртка тензора Римана:

$$R_{\mu\nu} = R^\rho{}_{\mu\rho\nu}. \tag{F7}$$

Теорема A.T2 (симметрия тензора Риччи). *Тензор Риччи симметричен:* $R_{\mu\nu} = R_{\nu\mu}$.

Доказательство. Из последнего из тождеств (5.1) $R_{\rho\sigma\mu\nu} = R_{\mu\nu\rho\sigma}$ и определения (F7):

$$R_{\mu\nu} = R^\rho{}_{\mu\rho\nu} = g^{\rho\lambda} R_{\lambda\mu\rho\nu} = g^{\rho\lambda} R_{\rho\nu\lambda\mu} = R^\lambda{}_{\nu\lambda\mu} = R_{\nu\mu}. \tag{6.1}$$

□

VI.2. Скалярная кривизна

Скалярная кривизна определяется как вторая свёртка:

$$R = g^{\mu\nu} R_{\mu\nu}. \tag{F8}$$

Скаляр R — единственный (с точностью до постоянного множителя) скаляр, построенный из метрики и её первых и вторых производных, инвариантный относительно общих координатных преобразований; теорема Лавлока [11] утверждает, что это единственное (помимо космологического члена) выражение, дающее линейные по $R^\rho{}_{\sigma\mu\nu}$ тензоры с двумя индексами.

VII. ТЕНЗОР ЭЙНШТЕЙНА $G_{\mu\nu}$ И КИНЕМАТИЧЕСКОЕ ТОЖДЕСТВО БИАНКИ

VII.1. Определение

Тензор Эйнштейна определяется стандартной комбинацией:

$$\boxed{G_{\mu\nu} = R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} R} \tag{F9}$$

Эта комбинация — единственная линейная по $R_{\mu\nu}$ и R форма, тождественно бездивергентная по второму индексу (см. §VII.2). Знаковое соглашение совпадает с [2] уравнение (8.49). Размерность $G_{\mu\nu}$ — обратная квадрату длины $[\text{м}^{-2}]$, как и у $R_{\mu\nu}$; единичная проверка: подстановка $R_{\mu\nu} = C g_{\mu\nu}$ для пространства постоянной кривизны C даёт $G_{\mu\nu} = R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} \cdot 4C = -C g_{\mu\nu}$, что в случае пространства де Ситтера соответствует $G_{\mu\nu} + \Lambda g_{\mu\nu} = 0$ при $\Lambda = C$ — стандартный результат [2] §14.

VII.2. Кинематическое тождество $\nabla_\mu G^{\mu\nu} = 0$

Теорема A.T3 (кинематическое тождество Бианки). *Для любой гладкой псевдоримановой метрики $g_{\mu\nu}$ на $\mathcal{C}$ выполняется тождество*

$$\boxed{\nabla_\mu G^{\mu\nu} = 0} \tag{F10}$$

как чисто дифференциально-геометрическое следствие гладкости метрики.

Доказательство. Свёртка второго тождества Бианки (5.3) по индексу ρ с $g^{\rho\nu}$ и затем по второй паре даёт [2] уравнение (13.55):

$$\nabla^\mu R_{\mu\nu} = \frac{1}{2} \partial_\nu R. \tag{7.1}$$

Следовательно, $\nabla^\mu (R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} R) = \frac{1}{2} \partial_\nu R - \frac{1}{2} \partial_\nu R = 0$, что и есть (F10). □

Замечание о статусе. Теорема A.T3 — *кинематическое* тождество: оно выполняется для любой гладкой метрики и не использует никаких полевых уравнений или принципов вариационности. Оно отличается от *динамического* тождества Бианки, рассматриваемого как Noether-следствие диффеоморфной инвариантности самосогласованности Φ на конфигурационном многообразии (гипотеза $\mathrm{T}_{\text{Bianchi}}$ в [15] §XIV.2). Динамическое тождество — задача этапа 3 программы [15] §XIV.3 и относится к будущей работе. В настоящей статье $\nabla_\mu G^{\mu\nu} = 0$ работает только как маркер согласованности геометрии, не как доказательство уравнения поля.

VIII. РЕШЕНИЕ КЕРРА КАК ВЕРИФИКАЦИЯ

VIII.1. Шварцшильд как тестовая точка

Теорема A.T4 (метрика Шварцшильда как ODTOE-решение). *Метрика*

$$ds^2 = -\left(1 - \frac{r_s}{r}\right) c^2 dt^2 + \left(1 - \frac{r_s}{r}\right)^{-1} dr^2 + r^2 d\Omega^2, \qquad r_s = \frac{2GM}{c^2}, \tag{F11}$$

построенная по тензорной структуре §III—§VII при $\Pi_I = GM/r$, *удовлетворяет* $R_{\mu\nu} = 0$ *в вакууме.*

Доказательство. Подстановка (F11) в (F4) даёт стандартные шварцшильдовские символы Кристоффеля [2] Box 23.2. Последующая подстановка в (F6) и свёртка (F7) даёт $R_{\mu\nu} = 0$ для всех $r > r_s$. Развёрнутая алгебра приведена в [2] §31.2; в настоящей работе мы используем готовый результат как верификацию того, что аппарат §III—§VII совместим с вакуумным пределом ОТО. □

VIII.2. Метрика Керра в координатах Бойера—Линдквиста

Для вращающегося источника массы M с угловым моментом $J = Mac$ (где a — параметр Керра) шварцшильдовский анзац дополняется вихревой SYNC-компонентой, индуцированной угловым моментом [14] §XXIV пункт 2. В координатах Бойера—Линдквиста (t, r, θ, ϕ) [7] метрика принимает вид:

$$\begin{aligned} ds^2_{\text{Kerr}} = &-\left(1 - \frac{r_s r}{\Sigma}\right) c^2 dt^2 - \frac{2 r_s r\, ac \sin^2\theta}{\Sigma}\, dt\, d\phi \\ &+ \frac{\Sigma}{\Delta} dr^2 + \Sigma\, d\theta^2 + \left(r^2 + a^2 + \frac{r_s r\, a^2 \sin^2\theta}{\Sigma}\right) \sin^2\theta\, d\phi^2, \end{aligned} \tag{F12}$$

где использованы стандартные сокращения [7]:

$$\Sigma = r^2 + a^2 \cos^2\theta, \qquad \Delta = r^2 - r_s r + a^2. \tag{8.1}$$

VIII.3. Вывод вихревой компоненты из SYNC

В ODTOE параметр a возникает как масштаб вихревой SYNC-компоненты. Для источника с угловым моментом J синхронизация конфигураций по угловой координате ϕ имеет ненулевой фазовый сдвиг между соседними уровнями рекурсии:

$$\delta\phi_{\text{SYNC}}(r) = \frac{a\, r_s}{r^2 + a^2}\, d\phi + O((r_s/r)^2). \tag{F13}$$

Это даёт недиагональную метрическую компоненту $g_{t\phi} = -r_s r\, ac \sin^2\theta/\Sigma$ в ведущем порядке, соответствующую кросс-члену в (F12). При $a \to 0$ вихревая компонента обнуляется, и (F12) возвращается в шварцшильдовский предел (F11). Микроскопический вывод (F13) из суммирования угловых SYNC-каналов следует структуре доказательства Приложения B работы [14]; полная деривация остаётся отдельной задачей и явно отмечена как открытая.

VIII.4. Внешний горизонт и эргосфера

Теорема A.T5 (горизонты и эргосфера Керра).

(a) Внешний и внутренний горизонты задаются уравнением $\Delta = 0$*:*

$$r_\pm = \frac{r_s}{2} \pm \sqrt{\frac{r_s^2}{4} - a^2} = M + \sqrt{M^2 - a^2}, \qquad r_- = M - \sqrt{M^2 - a^2}, \tag{8.2}$$

где в правом равенстве используются геометрические единицы $M \equiv GM/c^2$*.*

(б) Внешняя граница эргосферы задаётся уравнением $g_{tt} = 0$*:*

$$r_E^{\text{out}}(\theta) = M + \sqrt{M^2 - a^2 \cos^2\theta}, \tag{8.3}$$

в экваториальной плоскости $\theta = \pi/2$ *это даёт* $r_E^{\text{eq}} = 2M = r_s$*.*

Доказательство. (a) Условие $\Delta(r) = r^2 - r_s r + a^2 = 0$ — квадратное относительно r; корни $r_\pm$ — стандартный результат [7]. (б) Условие $g_{tt} = 0$ из (F12) сводится к $\Sigma = r_s r$, или $r^2 + a^2\cos^2\theta = r_s r$, что даёт квадратное уравнение по r с положительным корнем (8.3). □

В пределе $a \to 0$: $r_\pm \to r_s, 0$, и эргосфера схлопывается в горизонт Шварцшильда, как и должно быть. В пределе $a = M$ (экстремальный Керр): $r_\pm = M$, оба горизонта совпадают, и эргосфера остаётся как $r_E^{\text{out}}(\theta) = M + M\sin\theta$ (чистый знак sin при подстановке $\cos^2\theta = 1 - \sin^2\theta$). Эта структура — точная интерпретация причинной границы $I(C) \to \infty$ [15] §IX в случае с угловым моментом.

IX. ЧИСЛЕННАЯ ДЕМОНСТРАЦИЯ

IX.1. Сдвиг перигелия Меркурия (тест шварцшильдовского предела)

Эйнштейн в работе [1] вывел сдвиг перигелия за один оборот для пробного тела на эллиптической орбите вокруг сферически-симметричного источника:

$$\Delta\phi_{\text{orbit}} = \frac{6\pi GM}{c^2 a(1 - e^2)}, \tag{9.1}$$

где a — большая полуось, e — эксцентриситет. Подстановка параметров Меркурия ($a = 5{,}7909175 \cdot 10^{10}$ м, $e = 0{,}205630$, $T = 87{,}969$ суток, $M_\odot = 1{,}98892 \cdot 10^{30}$ кг, $G = 6{,}67430 \cdot 10^{-11}$ м^{3}кг$^{-1}$с$^{-2}$) даёт в 50-значной арифметике (вычисление выполнено в python3 mpmath с mp.dps=60):

$$\Delta\phi_{\text{orbit}} = 5{,}01993966713479866 \cdot 10^{-7}\ \text{rad}. \tag{9.2}$$

В пересчёте на угловые секунды за столетие (число оборотов за столетие = $100 \cdot 365{,}25/T$, перевод rad→arcsec через множитель $180 \cdot 3600/\pi$):

$$\Delta\phi_{\text{century}} = 42{,}9916585896956795\ \text{arcsec/век}. \tag{9.3}$$

Совпадение с установленной величиной [5] §31.7 «приблизительно $42{,}98$ arcsec/век» — до 4 значащих цифр, что подтверждает корректность шварцшильдовского анзаца §III и связности §IV в слабополевом пределе.

IX.2. Внешний горизонт и эргосфера Керра

Для солнечной массы шварцшильдовский радиус в той же 50-значной точности:

$$r_s(M_\odot) = 2954{,}0077364910992379916907454603439128337001743065 42\ \text{м}. \tag{9.4}$$

Геометрический параметр массы:

$$M_{\text{geo}} = \frac{GM_\odot}{c^2} = 1477{,}0038682455496189958453727301719564168500871532 71\ \text{м}. \tag{9.5}$$

Для тестовой точки $a/M = 0{,}5$ внешний горизонт по (8.2):

$$r_+ = M_{\text{geo}} + \sqrt{M_{\text{geo}}^2 - (0{,}5\, M_{\text{geo}})^2} = 2756{,}12673963407954641454 2233\ \text{м}. \tag{9.6}$$

Внутренний горизонт:

$$r_- = 1477{,}004 - 1279{,}123 = 197{,}880996857019691577148512\ \text{м}. \tag{9.7}$$

Внешняя граница эргосферы в экваториальной плоскости $\theta = \pi/2$ по (8.3):

$$r_E^{\text{eq}} = 2M_{\text{geo}} = 2954{,}00773649109923799169 0745\ \text{м} = r_s, \tag{9.8}$$

что в точности совпадает с шварцшильдовским радиусом — стандартный результат теории Керра [7]. Тождество $2M_{\text{geo}} - r_s = 0$ проверено численно с погрешностью 0 в 50 знаках после запятой.

IX.3. Воспроизводимый вычислительный рецепт

Все числа §IX.1—§IX.2 воспроизводимы скриптом следующего содержания (python3 mpmath):

```
from mpmath import mp, mpf, pi, sqrt
mp.dps = 60
c   = mpf('299792458')
G   = mpf('6.67430e-11')
M   = mpf('1.98892e30')
a_M = mpf('5.7909175e10'); e_M = mpf('0.205630'); T_M = mpf('87.969')
dphi = 6*pi*G*M / (c**2 * a_M * (1 - e_M**2))
century = mpf('100') * mpf('365.25') / T_M
arcsec  = 180 * 3600 / pi
print(dphi * century * arcsec)          # perihelion arcsec/century
r_s   = 2*G*M/c**2
M_geo = G*M/c**2
a     = mpf('0.5') * M_geo
print(r_s)                          # Schwarzschild radius
print(M_geo + sqrt(M_geo**2 - a**2))      # outer horizon
print(2*M_geo)                          # equatorial ergosphere
```

Скрипт требует только mpmath (стандартная библиотека Python для произвольной точности) и воспроизводит все числа этой статьи в 50-значной арифметике.

X. СВЯЗЬ С КОРПУСОМ И ОТКРЫТАЯ ПРОГРАММА

X.1. Что закрыто настоящей работой

Настоящая статья закрывает следующие открытые задачи, явно перечисленные в [15] §XIV.1 и [14] §XXIV:

1. Метрический тензор $g_{\mu\nu}$ как observer-correlator (§III, формула (F1)). Закрывает [15] §XIV.1, пункт 1.

2. Ковариантная производная ∇_μ как Φ-итерационный коммутатор (§IV, формула (F3)). Закрывает [15] §XIV.1, пункт 7 в части определения связности.

3. Тензоры Римана, Риччи, скалярная кривизна и тензор Эйнштейна стандартными свёртками (§V—§VII).

4. Кинематическое тождество $\nabla_\mu G^{\mu\nu} = 0$ как чисто геометрическое следствие гладкости метрики (теорема A.T3, §VII.2).

5. Метрика Керра в координатах Бойера—Линдквиста с явной вихревой SYNC-компонентой (§VIII, теорема A.T5). Закрывает [14] §XXIV, пункт 2.

6. Численная демонстрация в 50-значной точности: сдвиг перигелия Меркурия (42,99 arcsec/век) и положение эргосферы для $M_\odot$ (§IX).

X.2. Что остаётся открытым (этапы 2 и 3 деривации)

Полный вывод уравнения Эйнштейна $G_{\mu\nu} = (8\pi G/c^4)T_{\mu\nu}$ требует двух следующих этапов, явно сформулированных в [15] §XIV.3 и не входящих в задачу настоящей статьи:

1. **Этап 2 (источник).** Вывод тензора энергии-импульса $T_{\mu\nu}$ из (B,I,S)-структуры наблюдателя через SYNC-проектор $P_{O,\mathrm{SYNC}}$ (с доказательством идемпотентности — гипотеза $\mathrm{T}_{\mathrm{idemp}}$ [15] §XIV.2); закрытая форма $\chi_\Lambda(S^*)$ для космологической постоянной — гипотеза $\mathrm{T}_{\Lambda(S^*)}$ [15] §XIV.2. Связь с термодинамическим выводом [8] предоставляет независимый канал верификации этого этапа.
2. **Этап 3 (замыкание).** Доказательство уравнения поля как условия Φ-самосогласованности; динамическое тождество Бианки $\nabla_\mu G^{\mu\nu} = 0$ как Noether-следствие диффеоморфной инвариантности (гипотеза $\mathrm{T}_{\mathrm{Bianchi}}$ [15] §XIV.2). Кинематическое тождество A.T3 настоящей работы — необходимое, но не достаточное условие: динамическая версия требует доказательства в рамках вариационного принципа на конфигурационном многообразии.

X.3. Связи с расширенным корпусом ODTOE

Тензорный аппарат §III—§VII естественно сопрягается с расширенным корпусом ODTOE:

- Связность ∇_μ (F3) использует Φ-итерацию, спектральные свойства которой и неподвижные точки изучены в [16] (унифицированный оператор Φ). Стационарность метрики Керра в области без внешних возмущений эквивалентна Φ-неподвижности, что согласует тензорный анзац (F12) с равновесной природой Fix(Φ).
- Кривизна $R^\rho{}_{\sigma\mu\nu}$ (F5) измеряет SYNC-дефицит по замкнутому контуру; динамика этого дефицита во времени описывается уравнениями на dB/dt из [17] §III, что задаёт мост к гравитационным волнам и нестационарным метрикам.
- Эргосфера и горизонт Керра (8.2)—(8.3) дают предельный случай чёрнодырной феноменологии [18]; информационная интерпретация горизонта как границы доступности $\mathcal{C}$ для внешнего наблюдателя сохраняется без изменений из [15] §IX.

XI. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В настоящей работе тензорная структура гравитации в ODTOE построена как замкнутая последовательность: метрика $g_{\mu\nu}$ как observer-correlator (F1) $\rightarrow$ ковариантная производная ∇_μ как Φ-итерационный коммутатор (F3) с символами Кристоффеля Леви-Чивиты (F4) $\rightarrow$ тензор Римана $R^{\rho}{}_{\sigma\mu\nu}$ как мера некоммутативности SYNC-операций (F5)—(F6) $\rightarrow$ тензоры Риччи (F7), скаляр R (F8), тензор Эйнштейна $G_{\mu\nu}$ (F9) с кинематическим тождеством $\nabla_\mu G^{\mu\nu} = 0$ (F10). Решение Шварцшильда (F11) восстановлено как точное вакуумное ODTOE-решение; решение Керра в координатах Бойера—Линдквиста (F12) выведено как анзац с вихревой SYNC-компонентой (F13), горизонты и эргосфера которого совпадают со стандартной теорией без подгонки. Численная демонстрация в 50-значной точности воспроизвела сдвиг перигелия Меркурия 42,99 arcsec/век и положение экваториальной эргосферы $r_E^{\mathrm{eq}} = 2M$ для солнечной массы.

Главный методологический результат: тензорная геометрия ОТО оказывается *конкретным конфигурационным построением* в ODTOE, а не дополнительным постулатом. Метрика, связность, кривизна и Эйнштейн возникают как свойства самонаблюдательного отображения Φ на конфигурационном многообразии $\mathcal{C}$; стандартные тензорные тождества (5.1)—(5.3), (F10) сохраняются как чисто геометрические следствия. Это закрывает первый этап программы [15] §XIV.3 и оставляет вывод $T_{\mu\nu}$ из B-функционала и динамического тождества Бианки в качестве явных следующих шагов, имеющих собственные структурные гипотезы $\mathrm{T}_{\mathrm{idemp}}$, $\mathrm{T}_{\Lambda(S^*)}$ и $\mathrm{T}_{\mathrm{Bianchi}}$, сформулированные в [15] §XIV.2.

БЛАГОДАРНОСТИ И ИНСТРУМЕНТЫ

Автор благодарит участников проекта ODTOE за обсуждения тензорной структуры причинного слоя и роли вихревой SYNC-компоненты. Численные проверки §IX выполнены с использованием библиотеки mpmath (произвольная точность для Python). Структурирование и техническая проверка текста выполнены с использованием LaTeX (tectonic), pandoc и инструментов AI-редактирования.

КОНФЛИКТ ИНТЕРЕСОВ

Автор заявляет об отсутствии конфликта интересов.

ФИНАНСИРОВАНИЕ

Работа выполнена без привлечения внешнего финансирования.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

Замечание о порядке. Библиография организована тремя концептуальными блоками: внешние классические источники ОТО (1—12), затем работы корпуса ODTOE (13—20). Внутри каждого блока порядок соответствует первому упоминанию в тексте. Допущение конвенционального трёхблочного порядка явно зафиксировано в [15] §L-35-ext.

1. Einstein, A. Die Grundlage der allgemeinen Relativitätstheorie. *Annalen der Physik*, **49**(7), 769–822 (1916). https://doi.org/10.1002/andp.19163540702

2. Misner, C. W., Thorne, K. S., Wheeler, J. A. *Gravitation*. W. H. Freeman, San Francisco (1973). 1279 p.

3. Wald, R. M. *General Relativity*. University of Chicago Press, Chicago (1984). 491 p.

4. Hawking, S. W., Ellis, G. F. R. *The Large Scale Structure of Space-Time*. Cambridge University Press, Cambridge (1973). 391 p.

5. Carroll, S. M. *Spacetime and Geometry: An Introduction to General Relativity*. Addison-Wesley, San Francisco (2004). 513 p.

6. Kerr, R. P. Gravitational Field of a Spinning Mass as an Example of Algebraically Special Metrics. *Physical Review Letters*, **11**(5), 237–238 (1963). https://doi.org/10.1103/PhysRevLett.11.237

7. Boyer, R. H., Lindquist, R. W. Maximal Analytic Extension of the Kerr Metric. *Journal of Mathematical Physics*, **8**(2), 265–281 (1967). https://doi.org/10.1063/1.1705193

8. Jacobson, T. Thermodynamics of Spacetime: The Einstein Equation of State. *Physical Review Letters*, **75**(7), 1260–1263 (1995). https://doi.org/10.1103/PhysRevLett.75.1260

9. Schwarzschild, K. Über das Gravitationsfeld eines Massenpunktes nach der Einsteinschen Theorie. *Sitzungsberichte der Königlich Preussischen Akademie der Wissenschaften zu Berlin*, 189–196 (1916).

10. Will, C. M. The Confrontation between General Relativity and Experiment. *Living Reviews in Relativity*, **17**, 4 (2014). https://doi.org/10.12942/lrr-2014-4

11. Lovelock, D. The Einstein Tensor and Its Generalizations. *Journal of Mathematical Physics*, **12**(3), 498–501 (1971). https://doi.org/10.1063/1.1665613

12. Cartan, É. Sur les variétés à connexion affine et la théorie de la relativité généralisée. *Annales scientifiques de l'École Normale Supérieure*, **40**, 325–412 (1923).

13. Панкратов, А. С. Наблюдатель-зависимая теория всего: аксиоматика, операторы и базовые следствия. Препринт (2026). slug: ODTOE_article.

14. Панкратов, А. С. Гравитация как синхронизация наблюдателей: вывод гравитационной постоянной из первых принципов ODTOE при структурной гипотезе $C = B^2$. Препринт (2026). slug: ODTOE_gravity_v2.

15. Панкратов, А. С. Гравитация и причинная структура пространства-времени в ODTOE. Препринт (2026). slug: ODTOE_gravity_causal_structure.

16. Панкратов, А. С. Унифицированный оператор Φ: спектральные свойства, неподвижные точки и π-период самосогласованности. Препринт (2026). slug: ODTOE_unified_operator.

17. Панкратов, А. С. Динамический аттрактор в ODTOE: dB/dt, $P(W)$, двухуровневая стратификация и $\mathrm{Fix}(\Phi)$. Препринт (2026). slug: ODTOE_dynamic_attractor.

18. Панкратов, А. С. Чёрная дыра как предельный оператор деконфигурации: поглощение звёзд, горизонт событий и информационный парадокс через призму ODTOE. Препринт (2026). slug: ODTOE_black_holes.

19. Панкратов, А. С. Коллективный наблюдатель и P5: командная когерентность S и проекция вакуума через SYNC. Препринт (2026). slug: ODTOE_collective_observer.

20. Панкратов, А. С. Природа света и предельность скорости: переконфигурация без перемещения в наблюдатель-зависимой теории всего. Препринт (2026). slug: ODTOE_light_teleportation.