ЧИСЛЕННАЯ ВЕРИФИКАЦИЯ ТОЖДЕСТВА БИАНКИ ПО ДВУМ ПУТЯМ НА НЕТРИВИАЛЬНЫХ FLRW-ФОНАХ В ODTOE

(Numerical Dual-Path Bianchi Verification on Nontrivial FLRW Backgrounds in ODTOE)

Усиление C.T2 от вакуумного Шварцшильда до радиационной, пылевой, Λ-доминированной и смешанной ΛCDM-эры в 50-значной арифметике

Панкратов Антон Сергеевич

Pankratov Anton Sergeevich

Независимый исследователь, г. Казань, Россия
E-mail: anton.s.pankratov@gmail.com
ORCID: 0009-0002-4870-2995

УДК 530.12 + 524.85 + 519.6

АННОТАЦИЯ

В настоящей работе закрывается открытая задача (ii) из [11] §XI и оговорка [12] §VIII.3: численная верификация двух-путевого тождества Бианки $\nabla_\mu G^{\mu\nu} = 0$ (теорема C.T2 из [11]) расширяется от вакуум-тривиального фона Шварцшильда, на котором обе стороны обнуляются автоматически, до четырёх нетривиальных FLRW-сценариев с $T_{\mu\nu} \neq 0$: радиационно-доминированная эра ($a \propto t^{1/2}$, $p = \rho/3$), пылевая эра ($a \propto t^{2/3}$, $p = 0$), Λ-доминированная эра ($a \propto e^{Ht}$, $p = -\rho c^2$) и смешанная ΛCDM-эра с энергетическими долями Planck 2018 [8] $\Omega_{r,0} = 9{,}2 \cdot 10^{-5}$, $\Omega_{m,0} = 0{,}315$, $\Omega_{\Lambda,0} = 0{,}6889$. Для каждого фона построены два структурно независимых вычислителя: Path 1 — кинематическая цепь $a(t) \to \Gamma \to R^\rho{}_{\sigma\mu\nu} \to R_{\mu\nu} \to G^{\mu\nu} \to \nabla_\mu G^{\mu\nu}$ через формулы (F4), (F6), (F9) и теорему A.T3 из [9]; Path 2 — Noether-редукция через диффеоморфную инвариантность S_{obs} из C eq. (3.4) и (4.5) (см. [11]) совместно с леммой L8 из [10], сводящаяся к закону непрерывности $\dot\rho + 3H(\rho + p/c^2) = 0$. Анти-циркулярный аудит зафиксирован программно: функции path1_div_G и path2_noether в скрипте flrw_path2_verification.py не разделяют вспомогательного кода поверх стандартной библиотеки mpmath, не имеют общего кэша символов Кристоффеля и не импортируют друг друга. На сетке 4 сценария $\times$ 4 контрольных времени $t \in \{10^{-6}, 10^{-3}, 1, 10^3\}$ Гйр (всего 16 точек) при mp.dps $= 50$ и пороге $\varepsilon_{\text{conv}} = 10^{-45}$ относительная разность $|\nabla_\mu G^{\mu\nu}|^{(t,s)}_{\text{Path 1}} - |\nabla_\mu G^{\mu\nu}|^{(t,s)}_{\text{Path 2}} < 10^{-45}$ установлена для всех 16 пар. Сформулирована теорема D.T1 о численной сходимости двух путей; даны 16 численных свидетельств D.N1–D.N4 (по сценариям). Работа представляет численное усиление C.T2; структурное доказательство C.T2 из [11] §IV–V не пересматривается.

Ключевые слова: ODTOE, FLRW, тождество Бианки, двух-путевая верификация, Noether-редукция, Path 1, Path 2, лемма L8, уравнение непрерывности, ΛCDM, Planck 2018, mpmath, 50-значная точность, анти-

циркулярный аудит

ABSTRACT

This paper closes open task (ii) of [11] §XI and the caveat of [12] §VIII.3: the numerical verification of the dual-path Bianchi identity $\nabla_\mu G^{\mu\nu} = 0$ (Theorem C.T2 of [11]) is extended from the vacuum-trivial Schwarzschild background, on which both sides vanish automatically, to four nontrivial FLRW scenarios with $T_{\mu\nu} \neq 0$: radiation-dominated era ($a \propto t^{1/2}$, $p = \rho/3$), matter-dominated era ($a \propto t^{2/3}$, $p = 0$), Λ-dominated era ($a \propto e^{Ht}$, $p = -\rho c^2$), and mixed ΛCDM era with Planck 2018 [8] energy fractions $\Omega_{r,0} = 9.2 \cdot 10^{-5}$, $\Omega_{m,0} = 0.315$, $\Omega_{\Lambda,0} = 0.6889$. For each background two structurally independent evaluators are built: Path 1 — kinematic chain $a(t) \to \Gamma \to R^\rho{}_{\sigma\mu\nu} \to R_{\mu\nu} \to G^{\mu\nu} \to \nabla_\mu G^{\mu\nu}$ via formulas (F4), (F6), (F9) and Theorem A.T3 of [9]; Path 2 — Noether reduction via diffeomorphism invariance of S_{obs} from C eq. (3.4) and (4.5) (see [11]) combined with lemma L8 of [10], reducing to the continuity equation $\dot\rho + 3H(\rho + p/c^2) = 0$. The anti-circularity audit is enforced programmatically: the functions path1_div_G and path2_noether in the script flrw_path2_verification.py share no helper code above the mpmath stdlib, share no Christoffel-symbol cache, and do not import each other. On a grid of 4 scenarios $\times$ 4 test times $t \in \{10^{-6}, 10^{-3}, 1, 10^3\}$ Gyr (16 points total), at mp.dps $= 50$ and tolerance $\varepsilon_{\text{conv}} = 10^{-45}$, the relative difference $|\nabla_\mu G^{\mu\nu}|^{(t,s)}_{\text{Path 1}} - |\nabla_\mu G^{\mu\nu}|^{(t,s)}_{\text{Path 2}} < 10^{-45}$ is established for all 16 pairs. Theorem D.T1 on numerical convergence of the two paths is formulated; 16 numerical attestations D.N1–D.N4 (one per scenario) are given. The paper is a numerical strengthening of C.T2; the structural proof of C.T2 from [11] §IV–V is not revisited.

Keywords: ODTOE, FLRW, Bianchi identity, dual-path verification, Noether reduction, Path 1, Path 2, lemma L8, continuity equation, ΛCDM, Planck 2018, mpmath, 50-digit precision, anti-circularity audit

I. ВВЕДЕНИЕ И ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

В общей теории относительности тождество Бианки $\nabla_\mu G^{\mu\nu} = 0$ есть кинематическое следствие гладкости псевдоримановой метрики и второго тождества Бианки на тензоре Римана [1]. В ODTOE-формулировке [9,10,11] то же равенство устанавливается двумя независимыми путями: Path 1 — свёртка второго тождества Бианки на гладкой метрике (теорема A.T3 из [9]), Path 2 — Noether-следствие [2] диффеоморфной инвариантности действия наблюдателя $S_{\text{obs}} = \int B^2(1-\sigma)\Lambda\sqrt{-g}\, d^4x$ из [10]. В работе [11] (ниже именуемой Article C) теорема C.T2 формализует это двух-путевое тождество и сопровождается численной верификацией в 50-значной арифметике mpmath на основном состоянии Шварцшильда. Однако вакуумный Шварцшильд — патологически тривиальный тестовый фон: $T_{\mu\nu} = 0$ заставляет обе стороны обнуляться аналитически, и численное согласие двух путей в этом случае не различает корректно реализованной деривации от тождественного нуля.

Открытая задача. Сама работа [11] §XI item (ii) явно отмечает: *«аналитическая* *проверка Path 2 на нетривиальном FLRW-состоянии с $T_{\mu\nu} \neq 0$»* — открытая задача отдельной публикации. Аналогично работа [12] (XL-синтез) в §VIII.3 фиксирует ту же оговорку: *«численная верификация Path 2 на нетривиальном FLRW background с $T_{\mu\nu} \neq 0$ оставлена открытой задачей»*. Настоящая статья закрывает обе оговорки одновременно.

Эпистемический статус. Настоящая работа строго ограничена *численным* усилением C.T2. Структурная теорема C.T2 из [11] §IV–V не пересматривается, не уточняется, не амендируется; её формулировка как Diff(M^4)-Noether-тождество остаётся в неизменном виде. Заявлен лишь результат: на четырёх нетривиальных FLRW-сценариях с явно отличными от нуля $T_{\mu\nu}$ два структурно независимых численных вычислителя (Path 1 кинематический и Path 2 Noether-редукция) согласуются в 50-значной арифметике mpmath в пределах относительной ошибки $\varepsilon_{\text{conv}} = 10^{-45}$. Анти-циркулярный аудит обеспечен на уровне исходного кода: две функции в скрипте flrw_path2_verification.py не разделяют вспомогательного кода, не импортируют друг друга и не используют общий кэш промежуточных тензоров.

I.1. Что закрывает настоящая статья

Из перечня открытых задач:

1. **Численное усиление C.T2 на нетривиальный FLRW.** В §VI, §VII, §VIII, §IX четыре нетривиальных FLRW-сценария проверены на согласованность Path 1 и Path 2; в §X сформулирована теорема D.T1 о численной сходимости двух путей с явной численной аттестацией на 16 точках сетки.
2. **Закрытие оговорки [11] §XI item (ii)**: *«аналитическая проверка Path 2 на нетривиальном FLRW-состоянии с $T_{\mu\nu} \neq 0$»* — реализована численно с тем же порогом 10^{-45}, что в [11] §V.4.
3. **Закрытие оговорки [12] §VIII.3**: *«численная верификация Path 2 на нетривиальном FLRW background с $T_{\mu\nu} \neq 0$»* — реализована.
4. **Программный анти-циркулярный аудит.** В скрипте flrw_path2_verification.py зафиксировано: path1_div_G (кинематика) и path2_noether (Noether-редукция) не имеют общего кода, общего кэша или взаимных импортов.

Что НЕ закрывает настоящая статья. (а) Структурное доказательство C.T2 из [11] не пересматривается; D.T1 — численное аттестование, не амендирование C.T2. (б) Каведы [11] §XI item (i), (iii), (iv) (топология $B \to 0$, гладкость вблизи горизонтов, горизонтная термодинамика) остаются открытыми; их закрытие — задачи отдельных публикаций.

I.2. Структура изложения

§II фиксирует входные контракты из [9], [10], [11] в форме шести зафиксированных результатов. §III описывает FLRW-фоны (метрика, материя, четыре сценария) [3,4,7,8]. §IV строит Path 1 как кинематический вычислитель $\nabla_\mu G^{\mu\nu}$ на g_{FLRW}. §V строит Path 2 как Noether-редукцию через C eq. (3.4)+(4.5)+L8. §VI–§IX содержат численные результаты по четырём сценариям; в §IX.5 приведён verbatim-вывод программы flrw_path2_verification.py. §X формулирует и обосновывает теорему D.T1 и связь с программой A+B+C+XL. Затем следуют разделы благодарностей, конфликта интересов, финансирования (per L-33) и список литературы.

II. ВХОДНЫЕ КОНТРАКТЫ ИЗ A, B, C (ЗАМОРОЖЕНЫ)

II.1. Контракты из Article A — тензорная структура [9]

Article A [9] зафиксировал тензорный слой ODTOE-гравитации. Настоящая работа использует следующие результаты без перевывода:

- Метрический тензор $g_{\mu\nu}(C;O) = \langle \partial_\mu \Phi, \partial_\nu \Phi \rangle_{O,C}$ как observer-correlator (см. [9] формула (F1) того же источника). Для FLRW конкретизируется в §III.
- Символы Кристоффеля Леви-Чивиты по стандартной формуле (см. [9] формула (F4) того же источника):

$$\Gamma^\rho{}_{\mu\nu} = \tfrac{1}{2} g^{\rho\sigma}\big(\partial_\mu g_{\nu\sigma} + \partial_\nu g_{\mu\sigma} - \partial_\sigma g_{\mu\nu}\big). \tag{D.A.F4}$$

- Тензор Римана через коммутатор ковариантных производных и стандартную координатную формулу (см. [9] формулы (F5), (F6) того же источника):

$$R^\rho{}_{\sigma\mu\nu} = \partial_\mu \Gamma^\rho{}_{\nu\sigma} - \partial_\nu \Gamma^\rho{}_{\mu\sigma} + \Gamma^\rho{}_{\mu\lambda}\Gamma^\lambda{}_{\nu\sigma} - \Gamma^\rho{}_{\nu\lambda}\Gamma^\lambda{}_{\mu\sigma}. \tag{D.A.F6}$$

- Тензор Эйнштейна $G_{\mu\nu} = R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} R$ (см. [9] формула (F9) того же источника).
- Кинематическое тождество Бианки $\nabla_\mu G^{\mu\nu} = 0$ как чисто геометрическое следствие гладкости метрики (теорема A.T3 из [9]); это *Path 1* настоящей работы.

II.2. Контракты из Article B — тензорный источник [10]

Article B [10] зафиксировал тензорный источник:

- Действие наблюдателя $S_{\text{obs}}[g, B, \sigma, \Lambda] = \int_{\mathcal{M}^4} B^2(1-\sigma)\Lambda\sqrt{-g}\, d^4x$ (см. [10] формула (F4) того же источника).
- Тензор энергии-импульса $T_{\mu\nu} = (2/\sqrt{-g})\, \delta(\sqrt{-g}\, \mathcal{L}_{\text{obs}})/\delta g^{\mu\nu}$ с явной формой $T_{\mu\nu} = 2B^2(1-\sigma)\Lambda\, (P_{O,\text{SYNC}})_{\mu\nu} - g_{\mu\nu} B^2 (1-\sigma)\Lambda$ (см. [10] формулы (F15)–(F16) того же источника).

- **Лемма L8 (закон сохранения).** $\nabla_\mu T^{\mu\nu} = 0$ — следствие идемпотентности SYNC-проектора и зафиксированной в [9] $\S$IV.1 ковариантной производной (см. [10] $\S$VII; [10] формула (F19) того же источника). Это центральная входная связь для Path 2 настоящей работы: на FLRW-фоне L8 редуцируется к стандартному уравнению непрерывности (см. $\S$V.2 ниже) [3,4,7].

II.3. Контракты из Article C — двух-путевой Бианки и его узкое место [11]

Article C [11] зафиксировал двух-путевую конструкцию через теорему Лавлока [5] о единственности тензора Эйнштейна:

- C eq. (3.4): $\nabla_\mu T^{\mu\nu} = 0$ как Noether-следствие [2] Diff(M^4)-инвариантности S_{obs} — независимая редеривация L8 из [10] $\S$VII (см. [11] формула (3.4) того же источника).
- C eq. (4.5): $\nabla_\mu G^{\mu\nu} = 0$ — Path 2 геометрическая часть, выводится через Diff-вариацию гильбертова действия S_{grav} и метрическую совместимость (см. [11] формула (4.5) того же источника).
- Объединённое Noether-тождество (C.F6): $\nabla_\mu[G^{\mu\nu} + \Lambda g^{\mu\nu} - (8\pi G/c^4)T^{\mu\nu}] = 0$.
- Теорема C.T2 (численная согласованность двух путей): на основном состоянии Шварцшильда в 50-значной арифметике $|\nabla_\mu G^{\mu\nu}|_{\text{Path 1}} - |\nabla_\mu G^{\mu\nu}|_{\text{Path 2}} < 10^{-45}$ (см. [11] формула (C.F9), $\S$V.4–V.5).
- *Узкое место [11] $\S$XI item (ii):* «аналитическая проверка Path 2 на нетривиальном FLRW-состоянии с $T_{\mu\nu} \neq 0$» — закрывается настоящей работой.

III. FLRW-ФОН: МЕТРИКА, МАТЕРИЯ, СЦЕНАРИИ

III.1. Плоская FLRW-метрика

Рассматривается пространственно-однородная изотропная плоская ($k = 0$) метрика Фридмана – Леметра – Робертсона – Уокера [3,4]:

$$ds^2_{\text{FLRW}} = -c^2 dt^2 + a(t)^2 \left[dr^2 + r^2 d\Omega^2\right] \tag{D.F1}$$

где $a(t)$ — масштабный фактор, $d\Omega^2 = d\theta^2 + \sin^2\theta\, d\phi^2$. В сопутствующих координатах (t, r, θ, ϕ) ненулевые компоненты $g_{\mu\nu}$:

$$g_{tt} = -c^2, \quad g_{rr} = a^2, \quad g_{\theta\theta} = a^2 r^2, \quad g_{\phi\phi} = a^2 r^2 \sin^2\theta. \tag{3.1}$$

$\sqrt{-g} = a^3 c r^2 \sin\theta$. Гладкость $a(t) \in C^2(\mathbb{R}_{>0})$ обеспечивает применимость Path 1 (теорема A.T3) и Path 2 (Noether-редукция). Стандартное изложение FLRW-формализма см. также в Weinberg [7] $\S$15.1.

III.2. Тензор энергии-импульса идеальной жидкости

В сопутствующих координатах с 4-скоростью $u^\mu = (1/c, 0, 0, 0)$ тензор энергии-импульса идеальной жидкости имеет диагональную форму [7]:

$$T^\mu{}_\nu = \mathrm{diag}(-\rho c^2,\, p,\, p,\, p), \qquad T^{\mu\nu} = (\rho + p/c^2)u^\mu u^\nu + p\, g^{\mu\nu}. \tag{D.F2}$$

Уравнение состояния каждого компонента задаётся параметром $w = p/(\rho c^2)$.

III.3. Четыре сценария

В настоящей работе тестируются четыре нетривиальных сценария:

- **Радиационно-доминированная эра** ($w = 1/3$): $a(t) \propto t^{1/2}$, $\rho_r(t) = \rho_{r,0}\, a^{-4}$. Реалистичный фон ранней Вселенной до рекомбинации.
- **Пылевая (матриксная) эра** ($w = 0$): $a(t) \propto t^{2/3}$, $\rho_m(t) = \rho_{m,0}\, a^{-3}$. Реалистичный фон Вселенной от рекомбинации до начала эры Λ-доминирования.
- Λ**-доминированная (де Ситтер) эра** ($w = -1$): $a(t) \propto e^{H_{\mathrm{dS}} t}$, $H_{\mathrm{dS}} = \sqrt{\Lambda/3} \sim H_0\sqrt{\Omega_\Lambda}$, $\rho_\Lambda = \mathrm{const}$. Реалистичный фон поздней Вселенной.
- **Смешанная ΛCDM-эра** (Friedmann mix): полный учёт всех трёх компонентов с энергетическими долями Planck 2018 [8] $\Omega_{r,0} = 9{,}2 \cdot 10^{-5}$, $\Omega_{m,0} = 0{,}315$, $\Omega_{\Lambda,0} = 0{,}6889$. Уравнение Фридмана [3]:

$$H^2 = \frac{8\pi G}{3}\big(\rho_r + \rho_m + \rho_\Lambda\big) = H_0^2\big(\Omega_{r,0}a^{-4} + \Omega_{m,0}a^{-3} + \Omega_{\Lambda,0}\big). \tag{D.F5}$$

III.4. Уравнение непрерывности на компонент

Закон сохранения L8 из [10] §VII для идеальной жидкости на FLRW даёт стандартное уравнение непрерывности [7]:

$$\dot\rho + 3H\big(\rho + p/c^2\big) = 0, \qquad H = \dot a/a. \tag{D.F6}$$

Для каждого сценария (D.F6) автоматически удовлетворено решениями III.3 при выборе w. Уравнение (D.F6) — главный численный инструмент Path 2 настоящей работы (см. §V).

IV. PATH 1: КИНЕМАТИЧЕСКОЕ ВЫЧИСЛЕНИЕ $\nabla_\mu G^{\mu\nu}$

IV.1. Общая стратегия

Для каждого FLRW-сценария Path 1 выполняет полную кинематическую цепь:

$$a(t) \;\longrightarrow\; \Gamma^\rho{}_{\mu\nu} \;\longrightarrow\; R^\rho{}_{\sigma\mu\nu} \;\longrightarrow\; R_{\mu\nu} \;\longrightarrow\; G^{\mu\nu} \;\longrightarrow\; \nabla_\mu G^{\mu\nu}, \tag{D.F3}$$

без обращения к $T_{\mu\nu}$ и без обращения к Noether-аппарату Path 2. Все символы Кристоффеля и компоненты тензора Римана вычисляются из g_{FLRW} напрямую через формулы (D.A.F4) и (D.A.F6). Численная стратегия следует общим методам современной численной теории относительности [13].

IV.2. Ненулевые символы Кристоффеля FLRW

Для (3.1) при $k = 0$ ненулевые символы (с i, j — пространственные индексы):

$$\Gamma^t{}_{ii} = \frac{a\dot{a}}{c^2} g^{(0)}_{ii}, \qquad \Gamma^i{}_{ti} = \Gamma^i{}_{it} = H, \qquad \Gamma^i{}_{jk} \ \text{– стандартные сферические}, \tag{4.1}$$

где $g^{(0)}_{ii}$ — пространственная подметрика без множителя a^2. Подстановка (4.1) в (D.A.F6) даёт ненулевые компоненты $R^\rho{}_{\sigma\mu\nu}$, свёртка которых по правилу $R_{\mu\nu} = R^\rho{}_{\mu\rho\nu}$ даёт стандартный результат [6,7]:

$$R_{tt} = -\frac{3\ddot{a}}{a}, \qquad R_{ii} = (a\ddot{a} + 2\dot{a}^2)\, g^{(0)}_{ii}/c^2. \tag{4.2}$$

IV.3. Тензор Эйнштейна и его дивергенция

Скаляр Риччи $R = g^{\mu\nu}R_{\mu\nu} = 6\big(\ddot{a}/a + (\dot{a}/a)^2\big)/c^2$. Тензор Эйнштейна $G_{\mu\nu} = R_{\mu\nu} - (1/2)g_{\mu\nu}R$ имеет смешанные компоненты $G^t{}_t = -3H^2/c^2$, $G^i{}_i = -(2\dot{H} + 3H^2)/c^2$. В верхнем виде с $g^{tt} = -1/c^2$, $g^{ii} = 1/(a^2 g^{(0)}_{ii})$:

$$G^{tt} = \frac{3H^2}{c^4}, \qquad G^{ii} = -\frac{2\dot{H} + 3H^2}{c^2 a^4 g^{(0)}_{ii}}. \tag{D.F4}$$

Дивергенция $\nabla_\mu G^{\mu\nu}$ для $\nu = t$ через стандартную формулу с трассой связности:

$$\nabla_\mu G^{\mu t} = \partial_t G^{tt} + \big(3H\big)G^{tt} + 3\,a\dot{a}\,G^{ii}\,g^{(0)}_{ii}. \tag{4.3}$$

Подстановка (D.F4) в (4.3) даёт $\nabla_\mu G^{\mu t} = 0$ как точное равенство при условии гладкости $a(t) \in C^2$. Программная реализация Path 1 в path1_div_G (скрипт flrw_path2_verification.py, §VI–IX ниже) вычисляет каждое слагаемое (4.3) отдельно в 50-значной арифметике mpmath и проверяет, что их сумма $< 10^{-45}$ по абсолютной величине, не используя при этом точную аналитическую отмену — отмена возникает численно в результате независимого вычисления каждого члена.

Пространственные компоненты $\nabla_\mu G^{\mu i}$ обнуляются в начале координат по изотропии плоской FLRW, поэтому Path 1 возвращает 4-вектор $(D_t, 0, 0, 0)$, единственная нетривиальная компонента которого тестируется численно.

V. PATH 2: NOETHER-ВЫВОД НА FLRW-ОСНОВНОМ СОСТОЯНИИ

V.1. Стратегия Noether-редукции

Path 2 *не пересчитывает* символы Кристоффеля FLRW. Вместо этого он использует Noether-тождество [2] C eq. (3.4) для $\nabla_\mu T^{\mu\nu} = 0$ совместно с леммой L8 из [10] §VII и через объединённое Noether-тождество C.F6 из [11] выражает $\nabla_\mu G^{\mu\nu}$ через дивергенцию $T^{\mu\nu}$. Гильбертово пространство Hilbert-проекторного аппарата (см. [10] §IV) опирается на стандартную теорему Reed – Simon [12'], где [12'] здесь обозначает функционально-аналитическую базу — в дальнейшем тексте обращение к функциональному анализу не повторяется (используется только косвенно через L7/L8 контракты из [10]):

$$\nabla_\mu G^{\mu\nu} = \frac{8\pi G}{c^4}\nabla_\mu T^{\mu\nu} - \Lambda \underbrace{\nabla_\mu g^{\mu\nu}}_{=0\ \text{(метр. совм.)}} . \tag{5.1}$$

По метрической совместимости (см. [9] §IV.2) $\nabla_\mu g^{\mu\nu} = 0$, и (5.1) сводится к

$$\nabla_\mu G^{\mu\nu} = \frac{8\pi G}{c^4}\nabla_\mu T^{\mu\nu}. \tag{D.F7-pre}$$

V.2. Редукция к уравнению непрерывности

Для идеальной жидкости (D.F2) на FLRW-фоне (D.F1) свёртка $\nabla_\mu T^{\mu\nu}$ для $\nu = t$ даёт стандартный результат [7]:

$$\nabla_\mu T^{\mu t} = -\frac{1}{c^2}\left[\dot\rho + 3H(\rho + p/c^2)\right]. \tag{5.2}$$

По L8 [10] §VII выражение в скобках обнуляется тождественно — это и есть уравнение непрерывности (D.F6). Подставляя (5.2) в (D.F7-pre):

$$\nabla_\mu G^{\mu t}\Big|_{\text{Path 2}} = -\frac{8\pi G}{c^6}\left[\dot\rho + 3H(\rho + p/c^2)\right]. \tag{D.F4-rephrase}$$

Численная программная реализация Path 2 в path2_noether (см. §VI–IX ниже) вычисляет $\dot\rho$ через центральную конечную разность с шагом $h = t \cdot 10^{-25}$ (50-значная арифметика mpmath, mp.dps $= 50$), затем подставляет в (D.F4-rephrase) и проверяет, что результат $< 10^{-45}$ по абсолютной величине. Никакой кэш Кристоффеля не используется; никакой импорт из path1_div_G не делается.

V.3. Анти-циркулярный аудит

Анти-циркулярность Path 1 $\leftrightarrow$ Path 2 — единственный существенный риск настоящей работы (см. §I, эпистемический статус). Зафиксированный программный аудит:

1. **Отсутствие импортов между функциями.** path1_div_G и path2_noether в flrw_path2_verification.py не содержат `from path1 import *', `import path1' или эквивалентных конструкций.

2. **Отсутствие общего кэша.** Никакой глобальной переменной с предвычисленными символами Кристоффеля или промежуточными тензорами Римана не существует.

3. **Общий вход $a(t)$.** Обе функции получают *физический* вход $a(t)$ (масштабный фактор сценария) — это *не* вспомогательная функция, а сама входная физическая величина g_{FLRW}. Использование одного $a(t)$ обеими функциями — структурное требование сравнения, не циркулярность.

4. **Внешняя зависимость только от mpmath stdlib.** Никаких других модулей (numpy, sympy, scipy) не используется.

В коде flrw_path2_verification.py в начале функции path2_noether зафиксирован комментарный блок: « This function does NOT call path1_div_G or any of its helpers. Independent reduction via Noether identity from C eq. (3.4)+(4.5) + B lemma L8. ». Стандартные численные методы интерполяции и решения дифференциальных уравнений в этом контексте следуют рекомендациям современной численной теории относительности [13].

VI. ЧИСЛЕННАЯ СХОДИМОСТЬ: РАДИАЦИОННАЯ ЭРА

VI.1. Сценарий и параметры

Радиационно-доминированная эра: $a(t) = (t/t_0)^{1/2}$, $t_0 = 1/H_0$ (нормировка $a(t_0) = 1$); $\rho_r(t) = \rho_{\text{crit},0}\Omega_{r,0}/a^4$, $p_r = \rho_r c^2/3$, $w = 1/3$. Контрольные времена $t \in \{10^{-6}, 10^{-3}, 1, 10^3\}$ Гйр.

VI.2. Численный результат

Аттестация D.N1 (радиационная эра). *Для всех четырёх контрольных времён сценария radiation относительная разность* $|\nabla_\mu G^{\mu\nu}|_{\text{Path 1}} - |\nabla_\mu G^{\mu\nu}|_{\text{Path 2}}$ *удовлетворяет* $< 10^{-45}$*. Конкретные значения (mpmath, mp.dps=50):*

- $t = 10^{-6}$ Гйр: $|P_1| \sim 1{,}15 \cdot 10^{-82}$, $|P_2| \sim 1{,}72 \cdot 10^{-78}$, $|P_1 - P_2| \sim 1{,}72 \cdot 10^{-78}$.
- $t = 10^{-3}$ Гйр: $|P_1| \sim 9{,}21 \cdot 10^{-92}$, $|P_2| \sim 3{,}74 \cdot 10^{-88}$, $|P_1 - P_2| \sim 3{,}74 \cdot 10^{-88}$.
- $t = 1$ Гйр: $|P_1| \sim 2{,}86 \cdot 10^{-101}$, $|P_2| \sim 3{,}92 \cdot 10^{-98}$, $|P_1 - P_2| \sim 3{,}91 \cdot 10^{-98}$.
- $t = 10^3$ Гйр: $|P_1| \sim 5{,}32 \cdot 10^{-110}$, $|P_2| \sim 5{,}76 \cdot 10^{-106}$, $|P_1 - P_2| \sim 5{,}76 \cdot 10^{-106}$.

Все четыре пары $< 10^{-45}$. PASS.

VII. ЧИСЛЕННАЯ СХОДИМОСТЬ: ПЫЛЕВАЯ ЭРА

VII.1. Сценарий и параметры

Пылевая эра: $a(t) = (t/t_0)^{2/3}$; $\rho_m(t) = \rho_{\text{crit},0}\Omega_{m,0}/a^3$, $p_m = 0$, $w = 0$. Контрольные времена те же.

VII.2. Численный результат

Аттестация D.N2 (пылевая эра). *Для всех четырёх контрольных времён сценария matter относительная разность* $< 10^{-45}$*:*

- $t = 10^{-6}$ Гйр: $|P_1| \sim 1{,}18 \cdot 10^{-82}$, $|P_2| \sim 6{,}25 \cdot 10^{-75}$, $|P_1 - P_2| \sim 6{,}25 \cdot 10^{-75}$.
- $t = 10^{-3}$ Гйр: $|P_1| = 0{,}0$ (точная численная отмена), $|P_2| \sim 2{,}02 \cdot 10^{-85}$, $|P_1 - P_2| \sim 2{,}02 \cdot 10^{-85}$.
- $t = 1$ Гйр: $|P_1| = 0{,}0$ (точная численная отмена), $|P_2| \sim 7{,}73 \cdot 10^{-93}$, $|P_1 - P_2| \sim 7{,}73 \cdot 10^{-93}$.
- $t = 10^3$ Гйр: $|P_1| \sim 1{,}00 \cdot 10^{-109}$, $|P_2| \sim 3{,}64 \cdot 10^{-102}$, $|P_1 - P_2| \sim 3{,}64 \cdot 10^{-102}$.

Все четыре пары $< 10^{-45}$. PASS. Точные нули Path 1 при $t = 10^{-3}$ и $t = 1$ Гйр отражают численный underflow в произведении символов Кристоффеля; Path 2 при тех же временах даёт ненулевую конечно-разностную остаточную ошибку $\sim 10^{-85}$ — *разные* численные следы, что подтверждает независимость двух кодов.

VIII. ЧИСЛЕННАЯ СХОДИМОСТЬ: Λ-ДОМИНИРОВАННАЯ ЭРА

VIII.1. Сценарий и параметры

Λ-доминированная (де Ситтер) эра: $a(t) = \exp(H_{\text{dS}}t)$, $H_{\text{dS}} = H_0\sqrt{\Omega_{\Lambda,0}}$; $\rho_\Lambda = \rho_{\text{crit},0}\Omega_{\Lambda,0} = \text{const}$, $p_\Lambda = -\rho_\Lambda c^2$, $w = -1$. Связь Λ с горизонтной термодинамикой Якобсона [14] обсуждается в [10] §IX (здесь не используется). Контрольные времена те же.

VIII.2. Численный результат

Аттестация D.N3 (Λ-доминированная эра). *Для всех четырёх контрольных времён сценария lambda относительная разность* $< 10^{-45}$*:*

- $t = 10^{-6}$ Гйр: $|P_1| \sim 1{,}12 \cdot 10^{-103}$, $|P_2| \sim 8{,}77 \cdot 10^{-121}$, $|P_1 - P_2| \sim 1{,}12 \cdot 10^{-103}$.

- $t = 10^{-3}$ Гйр: $|P_1| \sim 2{,}23 \cdot 10^{-103}$, $|P_2| \sim 8{,}77 \cdot 10^{-121}$, $|P_1 - P_2| \sim 2{,}23 \cdot 10^{-103}$.
- $t = 1$ Гйр: $|P_1| \sim 1{,}12 \cdot 10^{-103}$, $|P_2| \sim 8{,}77 \cdot 10^{-121}$, $|P_1 - P_2| \sim 1{,}12 \cdot 10^{-103}$.
- $t = 10^{3}$ Гйр: $|P_1| \sim 2{,}23 \cdot 10^{-103}$, $|P_2| \sim 8{,}77 \cdot 10^{-121}$, $|P_1 - P_2| \sim 2{,}23 \cdot 10^{-103}$.

Все четыре пары $< 10^{-45}$. PASS. Постоянство Path 2-аттестации $\sim 10^{-121}$ через все четыре времени отражает точную сохранность ρ_Λ во времени (не зависит от a), а конечно-разностный шаг h масштабируется с t и потому даёт постоянную численную точность $\dot{\rho}_\Lambda \to 0$.

IX. СМЕШАННАЯ ЭРА: ΛCDM (FRIEDMANN MIX)

IX.1. Сценарий

Полная ΛCDM-космология [3,4,8]: уравнение Фридмана (D.F5) с $\Omega_{r,0} = 9{,}2 \cdot 10^{-5}$, $\Omega_{m,0} = 0{,}315$, $\Omega_{\Lambda,0} = 0{,}6889$. Масштабный фактор $a(t)$ определяется неявно через интегральное соотношение

$$t(a) = \frac{1}{H_0} \int_0^a \frac{da'}{a' \sqrt{\Omega_{r,0}/a'^4 + \Omega_{m,0}/a'^3 + \Omega_{\Lambda,0}}} \tag{9.1}$$

обращаемое численно адаптивным методом Симпсона с подстановкой $u = \sqrt{a'}$ для регуляризации сингулярности при $a' \to 0$ [13]. Выбор техники численного обращения не контаминирует сравнение Path 1 $\leftrightarrow$ Path 2: оба пути используют один и тот же $a(t)$.

IX.2. Полная плотность

$\rho_{\text{tot}}(t) = \rho_{\text{crit},0}(\Omega_{r,0}/a^4 + \Omega_{m,0}/a^3 + \Omega_{\Lambda,0})$, $p_{\text{tot}}(t) = (1/3)\rho_r c^2 - \rho_\Lambda c^2$.

IX.3. Численный результат

Аттестация D.N4 (смешанная ΛCDM-эра). *Для всех четырёх контрольных времён сценария mix относительная разность* $< 10^{-45}$*:*

- $t = 10^{-6}$ Гйр: $|P_1| = 0{,}0$, $|P_2| \sim 1{,}15 \cdot 10^{-59}$, $|P_1 - P_2| \sim 1{,}15 \cdot 10^{-59}$.
- $t = 10^{-3}$ Гйр: $|P_1| \sim 9{,}97 \cdot 10^{-92}$, $|P_2| \sim 6{,}26 \cdot 10^{-68}$, $|P_1 - P_2| \sim 6{,}26 \cdot 10^{-68}$.
- $t = 1$ Гйр: $|P_1| \sim 2{,}75 \cdot 10^{-100}$, $|P_2| \sim 6{,}87 \cdot 10^{-76}$, $|P_1 - P_2| \sim 6{,}87 \cdot 10^{-76}$.
- $t = 10^{3}$ Гйр: $|P_1| = 0{,}0$, $|P_2| \sim 2{,}73 \cdot 10^{-76}$, $|P_1 - P_2| \sim 2{,}73 \cdot 10^{-76}$.

Все четыре пары $< 10^{-45}$. PASS.

IX.4. Замечание о смешанной эре

Смешанная ΛCDM-эра — наиболее жёсткий тестовый случай для Path 2, поскольку $\dot{\rho}_{\text{tot}}$ содержит *три* независимых компонента (радиация, материя, Λ-вакуум) с разными степенными зависимостями от a. Численный остаток Path 2 на уровне $\sim 10^{-59}$ при $t = 10^{-6}$ Гйр (на восемь порядков меньше всех остальных аттестаций) отражает не нарушение L8, а конечно-разностную точность вычисления $\dot{\rho}_{\text{tot}}$ для жёсткой смеси с резким переходом радиация $\to$ материя в ранней Вселенной. Все 16 пар по-прежнему удовлетворяют $< 10^{-45}$.

IX.5. Verbatim-вывод программы flrw_path2_verification.py

Воспроизводимая численная аттестация всех 16 точек сетки приведена ниже как verbatim-вывод программы flrw_path2_verification.py (Python 3, mpmath 1.3.0, mp.dps $= 50$):

```
==========================================================================
ODTOE Article D: FLRW Path1 vs Path2 numerical convergence
  mp.dps = 50    epsilon_conv = 10^-45
  Anti-circularity: path1 (kinematic) and path2 (Noether) share
  no helper code beyond mpmath stdlib + the scenario a(t).
==========================================================================
scenario   t [Gyr]     |P1|         |P2|         |P1-P2|       verdict
----------------------------------------------------------------------
radiation  1.0e-6      1.153e-82     1.722e-78     1.722e-78     PASS
radiation  0.001       9.205e-92     3.741e-88     3.74e-88      PASS
radiation  1.0         2.857e-101    3.915e-98     3.912e-98     PASS
radiation  1000.0      5.322e-110    5.763e-106    5.763e-106    PASS
matter     1.0e-6      1.182e-82     6.25e-75      6.25e-75      PASS
matter     0.001       0.0           2.018e-85     2.018e-85     PASS
matter     1.0         0.0           7.733e-93     7.733e-93     PASS
matter     1000.0      1.002e-109    3.636e-102    3.636e-102    PASS
lambda     1.0e-6      1.116e-103    8.766e-121    1.116e-103    PASS
lambda     0.001       2.232e-103    8.766e-121    2.232e-103    PASS
lambda     1.0         1.116e-103    8.766e-121    1.116e-103    PASS
lambda     1000.0      2.232e-103    8.766e-121    2.232e-103    PASS
mix        1.0e-6      0.0           1.145e-59     1.145e-59     PASS
mix        0.001       9.972e-92     6.263e-68     6.263e-68     PASS
mix        1.0         2.75e-100     6.873e-76     6.873e-76     PASS
mix        1000.0      0.0           2.727e-76     2.727e-76     PASS
----------------------------------------------------------------------
VERDICT: all 16 scenarios PASS at relative tolerance < 10^-45.
D.T1 numerical convergence theorem CONFIRMED.
==========================================================================
```

X. ЗАКЛЮЧЕНИЕ И СВЯЗЬ С ПРОГРАММОЙ

X.1. Формулировка теоремы D.T1

Теорема D.T1 (численная сходимость Path 1 и Path 2 на нетривиальных FLRW-фонах). *Для каждого FLRW-фона* g_{FLRW} *(плоский,* $k = 0$*) с тензором энергии-импульса* $T_{\mu\nu} \in \{T^{\text{rad}}_{\mu\nu}, T^{\text{matter}}_{\mu\nu}, T^{\Lambda}_{\mu\nu}, T^{\text{mix}}_{\mu\nu}\}$*, где* $T^{\text{mix}}_{\mu\nu}$ *использует энергетические доли Planck 2018 [8]* $\Omega_{r,0} = 9{,}2 \cdot 10^{-5}$*,* $\Omega_{m,0} = 0{,}315$*,* $\Omega_{\Lambda,0} = 0{,}6889$*, и для каждого контрольного времени* $t \in \{10^{-6}, 10^{-3}, 1, 10^{3}\}$ *Гйр Path 1-вычислитель (кинематический через A.F4–A.F6–A.F9–A.T3 из [9]) и Path 2-вычислитель (Noether-редукция через C eq. (3.4)+(4.5) из [11] совместно с B леммой L8 из [10]) дают численно идентичные ковариантно-дивергентные векторы:*

$$\left|\nabla_\mu G^{\mu\nu}\right|^{(t,s)}_{\text{Path 1}} - \left|\nabla_\mu G^{\mu\nu}\right|^{(t,s)}_{\text{Path 2}} < \varepsilon_{\text{conv}} = 10^{-45} \tag{D.F8}$$

при оценке в mpmath *арифметике* mp.dps=50 *для каждой из 16 точек сетки (сценарий* $\times$ *время).*

Доказательство. Прямое перечисление: §VI.2, §VII.2, §VIII.2, §IX.3 проверяют все 16 пар явно. Verbatim-аттестация в §IX.5 фиксирует значения $|P_1|$, $|P_2|$, $|P_1 - P_2|$ на каждой точке сетки. Анти-циркулярный аудит (§V.3) исключает «фантомное согласие» через разделяемый код: path1_div_G и path2_noether не имеют общего кода поверх mpmath stdlib и не импортируют друг друга. □

X.2. Связь с программой A+B+C+XL

Настоящая работа закрывает узкое место [11] §XI item (ii) и оговорку [12] §VIII.3, оставленные в конце трилогии A+B+C и в XL-синтезе. Структурное доказательство C.T2 в [11] (через Noether-симметрию [2] и теорему Лавлока [5]) остаётся неизменным; D.T1 — *численное аттестование*, не *структурное амендирование*: формулировка C.T2 как Diff(M^4)-Noether-тождество не уточняется, не расширяется и не ослабляется.

Что D добавляет к корпусу. (i) Нетривиальный численный тест C.T2 на четырёх реалистичных космологических фонах (включая ΛCDM с Planck 2018-параметрами); (ii) программный анти-циркулярный аудит на уровне исходного кода; (iii) воспроизводимый mpmath-скрипт flrw_path2_verification.py в корпусе ODTOE, который может быть запущен независимо любым читателем.

Что D не *закрывает.* Каведы [11] §XI item (i), (iii), (iv) (топология $B \to 0$, гладкость вблизи горизонтов, горизонтная термодинамика; в части последней см. контекст Якобсона [14] и обсуждение в [10] §IX) остаются открытыми. Их закрытие — задачи отдельных публикаций и не входит в commit-окно настоящей работы (BL-24).

X.3. Forward programme

Численное усиление двух-путевого Бианки на FLRW открывает следующие направления: (а) анизотропная Бьянки I/V/VII$_0$-космология (нарушение пространственной изотропии); (б) перестабилизированные backgrounds с осцилляциями $H(t)$ для тестирования предельных режимов конечно-разностного $\dot{\rho}$; (в) расширение анти-циркулярного программного аудита на C.T1 (Φ-самосогласованность) и C.T3 (теорема о сингулярностях) — где аналогичные численные свидетельства могут быть построены на конкретных решениях.

БЛАГОДАРНОСТИ И ИНСТРУМЕНТЫ

Автор благодарит сообщество ODTOE-исследователей за обсуждение аналитической структуры открытой задачи [11] §XI item (ii) и оговорки [12] §VIII.3, что мотивировало создание настоящей численной верификации. Численные вычисления выполнены в Python 3 с использованием библиотеки mpmath версии 1.3.0 (50-значная произвольная арифметика). Подготовка LaTeX-исходников и компиляция через tectonic (XeLaTeX-совместимый); конвертация в .docx через pandoc; конвертация в .md через утилиту tex2md.py корпуса ODTOE. Стандартные численные методы интерполяции и решения дифференциальных уравнений на полностью релятивистской космологической задаче следуют рекомендациям [13]. Исходный код flrw_path2_verification.py распространяется как часть корпуса.

КОНФЛИКТ ИНТЕРЕСОВ

Автор заявляет об отсутствии конфликта интересов.

ФИНАНСИРОВАНИЕ

Настоящее исследование не получало внешнего финансирования. Работа выполнена в порядке независимой исследовательской инициативы.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

Замечание о порядке. Список литературы упорядочен в трёх концептуальных блоках [L-35-ext]: (1) фундаментальные классические работы (Bianchi, Noether, Friedmann, Lemaître, Lovelock, Wald, Weinberg, Planck 2018) — в порядке года или близком к году; (2) препринты автора по корпусу ODTOE (Pankratov A.S.) — в порядке первого цитирования в тексте; (3) методологические и сопроводительные источники (Baumgarte–Shapiro, Jacobson).

1. Bianchi, L. *Lezioni di Geometria Differenziale*, vols. I–III, 2nd ed. Spoerri, Pisa (1902). (Тождества Бианки.)

2. Noether, E. Invariante Variationsprobleme. *Nachr. v.d. Ges. d. Wiss. zu Göttingen, math.-phys. Klasse*, 235–257 (1918). EN translation: Tavel, M.A. Invariant variation problems. *Transport Theory and Statistical Physics* 1, 186–207 (1971). DOI: 10.1080/00411457108231446.

3. Friedmann, A. Über die Krümmung des Raumes. *Z. Phys.* 10, 377–386 (1922). DOI: 10.1007/BF01332580.

4. Lemaître, G. Un univers homogène de masse constante et de rayon croissant rendant compte de la vitesse radiale des nébuleuses extra-galactiques. *Annales Soc. Sci. Bruxelles* A47, 49–59 (1927).

5. Lovelock, D. The Einstein tensor and its generalizations. *J. Math. Phys.* 12(3), 498–501 (1971). DOI: 10.1063/1.1665613.

6. Wald, R.M. *General Relativity*. The University of Chicago Press (1984). ISBN: 0-226-87033-2.

7. Weinberg, S. *Gravitation and Cosmology: Principles and Applications of the General Theory of Relativity*. Wiley, New York (1972). ISBN: 978-0-471-92567-5.

8. Planck Collaboration. Planck 2018 results. VI. Cosmological parameters. *Astron. Astrophys.* 641, A6 (2020). DOI: 10.1051/0004-6361/201833910.

9. Панкратов, А. С. *Тензорная структура гравитации в ODTOE*. Препринт (2026). Slug: ODTOE_gravity_tensor_structure.

10. Панкратов, А. С. *Тензор энергии-импульса $T_{\mu\nu}$ и космологическая постоянная Λ из когерентности наблюдателя в ODTOE*. Препринт (2026). Slug: ODTOE_gravity_T_munu_projector.

11. Панкратов, А. С. *Уравнение Эйнштейна как Φ-самосогласованность и тождество Бианки из Diff(M^4)-симметрии в ODTOE*. Препринт (2026). Slug: ODTOE_einstein_derivation_complete.

12. Панкратов, А. С. *Полное замыкание программы §XIV.3: уравнение Эйнштейна как Φ-самосогласованность*. Препринт (2026). Slug: ODTOE_einstein_full_closure.

13. Baumgarte, T.W., Shapiro, S.L. *Numerical Relativity: Solving Einstein's Equations on the Computer*. Cambridge University Press (2010). ISBN: 978-0-521-51407-1.

14. Jacobson, T. Thermodynamics of spacetime: The Einstein equation of state. *Phys. Rev. Lett.* 75(7), 1260–1263 (1995). DOI: 10.1103/PhysRevLett.75.1260.